РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 531.6 + 669.14

Алюшин Ю. А.

ОСОБЕННОСТИ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА (Сообщение 2)

Описание процессов деформации в переменных Лагранжа [1, 2] имеет ряд преимуществ, основными из которых являются возможность использования принципа суперпозиции движений [3] и сравнительная простота расчета инвариантов, определяющих энергетические характеристики [2]. Если уравнения движения удовлетворяют условиям в скоростях (перемещениях) на границах заготовки и постоянства объёма в её объёме, тогда по существу эта методика преобразуется в разновидность метода верхней оценки [4] с возможностью использования достаточно простых алгоритмов и наборов универсальных блоков с известными решениями, из которых формируется очаг деформации. Для плоской, осесимметричной и трехмерной деформации (осадка, обжим, раздача, прокатка и др.) такие решения приведены в работах [4, 5].

Такой же принцип можно использовать при описании движения в форме Лагранжа, но в этом случае общее решение формируется не из блоков с кинематически возможными полями скоростей, а из траекторий, которые соответствуют частицам в совмещаемых движениях [6, 7]. Преимущества такой методики состоят в возможности учета накопленной деформации (аналог параметра Одквиста [8]) для оценки предельных условий деформации, расчета локальной и интегральной мощности на любой стадии с учетом упрочнения материала.

Целью работы является описание и иллюстрация на конкретных примерах алгоритма конструирования кинематически возможных уравнений движения в форме Лагранжа, преимущественно для осесимметричных процессов в цилиндрической системе для осевых (z) и радиальных (ρ) координат, которые позволяют найти любые кинематические и энергетические характеристики, в том числе для оценки предельных условий деформации и энергосиловых параметров процесса. Методика не исключает переход к общепринятым инвариантам тензоров напряжений, деформации и скоростей деформации. С учетом этого ниже приведены уравнения движения в форме Лагранжа и соответствующие им кинематически возможные поля скоростей в форме Эйлера.

Исходными для анализа являются наборы уравнений движения в форме Лагранжа для элементарных процессов плоской, осесимметричной или трехмерной деформации, наложение которых позволяет моделировать более сложные процессы, для которых применение других методов, например, определение напряженного состояния или построение кинематически возможных полей скоростей, связано с дополнительными трудностями. Для каждого исследуемого процесса, например осесимметричной штамповки или поперечно-винтовой прокатки, выбираем простейшие процессы с известными уравнениями движения, из которых может быть сконструирован исследуемый. Если в дальнейшем предполагается «оптимизация», например, определение положения сечения, в котором отсутствуют радиальные перемещения при осадке кольца, по минимуму мощности деформации или предельным значениям накопленной деформации, выбираем для каждого процесса варьируемые параметры.

Так как суперпозиция сводится к замене переменных Лагранжа внешнего движения выражениями для соответствующих переменных Эйлера (через переменные Лагранжа) для внутренних движений [3], наиболее важным является выбор последовательности наложения процессов. Если в задачи исследования входит учёт упругих деформаций, тогда они должны рассматриваться как внутренние по отношению к пластическим. При использовании предположений о постоянстве объёма частиц учитываются только необратимые деформации. Для неустановившихся процессов, как правило, перемещения совмещаемых операций имеют один порядок и поэтому любое из совмещаемых движений можно рассматривать как внутреннее, а другое – как внешнее [6]. Для установившихся процессов внешними (наложенными) будут перемещения инструмента вместе с заготовкой, внутренними (вложенными) – движения за счет деформации.

Если предполагается суперпозиция трёх и более совмещаемых процессов, тогда надо последовательно провести суперпозицию внутренних, по отношению к остающимся, процессов, принимая любое из них как внешнее к совмещаемым. Общее количество совмещаемых процессов не ограничено, но диапазон изменения переменных Лагранжа должен быть общим для всех процессов. Входящие в совмещаемые процессы параметры времени, например, угол поворота при кручении и изменение высоты при осадке заготовки, в общем случае являются независимыми, можно предусматривать как одновременное, так и последовательное протекание совмещаемых процессов.

После каждого наложения (суперпозиции) сложность уравнений возрастает и это создает трудности для продолжения исследований в аналитической форме. Однако это не относится к численным расчетам, так как суперпозиция в этом случае сводится к простой замене идентификаторов в соответствующих программируемых выражениях, например, к замене адресов в пакете Excel. Взаимная замена внешних и внутренних движений может влиять на сложность (точнее, громоздкость) аналитических выражений, но практически не отражается на численных результатах расчётов.

Принимая во внимание целесообразность применения излагаемой методики именно для сложных процессов, особо выделим этапы численных расчетов, которые должны обязательно включать последовательный расчет (для всех точек сетки лагранжевых координат в исследуемом очаге деформации) текущих координат Эйлера (по принятым уравнениям движения в форме Лагранжа), их производных по времени (компоненты скорости и ускорения), а также по направлениям. Последние определяют деформированное и энергетическое состояние частиц в соответствии с уравнениями, приведенными в работе [2]. При достаточно малом шаге приращения координат между смежными точками можно использовать численные методы дифференцирования, например, по среднеквадратичным параболам. Выбор методов дифференцирования зависит от точности исходных данных, например, по перемещениям на контактных поверхностях (условия трения), и требуемой точности результатов для мощности, усилий или значений накопленной деформации.

По результатам дифференцирования определяем инварианты уравнений движения, компоненты тензоров скоростей деформации и деформации для каждого из налагаемых процессов. Эти данные могут быть полезны для оценки влияния любого из совмещаемых процессов на конечные результаты после суперпозиции движений.

Как отмечено выше, при расчете координат Эйлера совмещенного процесса достаточно поменять идентификаторы (адреса) переменных Лагранжа в расчете внешнего движения на идентификаторы (адреса) переменных Эйлера внутреннего движения. В дальнейшем процедуры расчета для совмещенного процесса не отличаются от таковых при расчете совмещаемых процессов. Вычисления следует продолжать вплоть до расчета локальной, а затем и интегральной (по всему объёму заготовки) мощности деформации, так как именно по характеру изменения последней можно найти наиболее приближенные к действительным значения варьируемых параметров, используемых в уравнениях движения, и любых других характеристик, включая мощность и усилия деформации.

В конечной стадии расчетов следует провести проверку выполнения условия постоянства объёма и граничных условий для перемещений, а также дифференциальных уравнений движения или равновесия [1, 2]. Это может служить критерием точности полученных результатов по всем другим параметрам. При необходимости расчет может быть повторен с изменением порядка наложения совмещаемых процессов или особенностей их реализации (последовательное или одновременное). Анализ результатов удобнее проводить по графическому их отображению в виде кривых или поверхностей, отражающих зависимость, например, интегральной мощности от значений варьируемых параметров.

Расчет необходимых внешних энергетических затрат, других локальных или интегральных параметров для оценки устойчивости процесса или его оптимизации по конструктивным параметрам используемого инструмента, скоростным и пр. факторам следует проводить после выбора обоснованных значений варьируемых параметров. Если для исследуемых материалов известны физические свойства [9], тогда можно использовать новые критерии предельных деформаций и определять усилия на поверхностях инструмента через напряжения Лагранжа [2].

Ниже приведены наиболее часто используемые уравнения движения в форме Лагранжа и компоненты скорости для простейших процессов с примерами их суперпозиции и проверкой выполнения условия постоянства объёма в дифференциальной (через первый инвариант тензора скорости деформации) и интегральной (через отношение объёмов частицы в текущем δV и исходном δV_0 состояниях $R = \delta V / \delta V_0$). Указаны также источники, в которых подробно рассмотрена методика их получения.

Для однородной осадки (при отсутствии трения на контактных поверхностях) цилиндрического образца уравнения движения имеют вид [10, 11]:

$$\rho = \rho_0 \sqrt{h_0 / h}\,, \qquad z = z_0 h / h_0, \tag{1}$$

где h_0 и h – начальная и текущая высота заготовки, ρ_0, h_0 и ρ, h – начальные (лагранжевы) и текущие (эйлеровы) радиальные и осевые координаты частиц, соответственно. Параметром времени является изменение высоты заготовки $\Delta h = h_0 - h$ или её текущая высота h. Дифференцируя соотношения (1) по времени t, получаем компоненты скорости в формах Лагранжа и Эйлера:

$$u = \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{2h}\rho_0 \frac{dh}{dt}\sqrt{\frac{h_0}{h}} = -\frac{1}{2} v_0 \frac{\rho}{h}, \qquad w = \frac{dz}{dt}_t = v_0 \frac{z_0}{h_0} = v_0 \frac{z}{h},$$

где $v_0 = -dh/dt$ – скорость перемещения верхней плиты. Область определения переменных определяют размеры заготовки в исходном и текущем состояниях $0 \le \rho_0 \le R_0$, $0 \le z_0 \le h_0$, $0 \le \rho \le R$, $0 \le z \le h$, R, h – текущие (в рассматриваемый момент времени) радиус и высота заготовки.

При полном прилипании (максимальное трение на контактных поверхностях) уравнения движения и компоненты скорости определяют уравнения [6]:

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{h_0(4C_0 + h)}{h(4C_0 + h_0)}\right]^{3/4}, \qquad z = \frac{h}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h}{4C_0 + h}}\right), \qquad C_0 = h_0 \frac{\xi_0(1-\xi_0)}{(1-2\xi_0)^2}, \tag{2}$$

где параметр C_0 характеризует начальное положение частицы ($\xi_0 = z_0 / h_0$). Радиальная и осевая компоненты скорости в форме Эйлера:

$$u = -3v_0 \frac{z\rho(h-z)}{h^3} = -3v_0 \frac{\rho}{h}\xi(1-\xi), \qquad w = v_0\left(3\frac{z^2}{h^2} - 2\frac{z^3}{h^3}\right) = v_0 \xi^2 (3 - 2\xi),$$

где $\xi = z/h$ – относительная осевая координата, v_0 – скорость сближения плит (может изменяться по мере изменения высоты заготовки). Начальные ($z = z_0$, $\rho = \rho_0$ при $z_0 = h_0$) и граничные ($\rho = 0$ при $\rho_0 = 0$, $z = 0$ при $z_0 = 0$ и $z = h$ при $z_0 = h_0$) условия, а также условие постоянства объёма в форме дивергенции вектора скорости $div\vec{v} = 0$ или отношения объёмов частицы в текущем и исходном состояния (якобиан преобразования в соответствии с уравнениям движения (1) или (2) $R = \delta V / \delta V_0 = 1$) выполняются.

Осадку цилиндра с промежуточным трением [6] можно рассматривать как наложение двух процессов, предполагая, что при сближении плит на величину Δh одна часть $\Delta h_1 = k_1 \Delta h$ ассоциируется с неравномерной деформацией, а другая $\Delta h_2 = k_2 \Delta h$ – с равномерной ($k_1 + k_2 = 1$). На первом этапе при изменении высоты заготовки от h_0 до h_1 при

$$h_1 = h_0 - \Delta h_1 = h_0 - k_1 \Delta h = h_0 - k_1 (h_0 - h) = h_0 (1 - k_1) + k_1 h = (1 - k_2) h + k_2 h_0$$

происходит, например, неравномерная деформация, а на втором (при уменьшении высоты заготовки от h_1 до h) – равномерная. На первом этапе уравнения движения имеют вид (2). На втором следует использовать уравнения (1) с новыми значениями лагранжевых координат:

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{h_1}{h} \left[\frac{h_0 (4C_0 + h_1)}{h_1 (4C_0 + h_0)} \right]^{3/4}}, \qquad z = \frac{h}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{h_1}{4C_0 + h_1}} \right). \tag{3}$$

Если же считать, что на первом этапе происходит равномерная, а на втором – неравномерная деформация, тогда вместо (3) получаем:

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{h_0}{h_1} \left[\frac{h_1 (4C_1 + h)}{h (4C_1 + h_1)} \right]^{3/4}}, \qquad z = \frac{h_1 h}{2h_0} \left(1 \pm \sqrt{\frac{h}{4C_1 + h}} \right), \qquad C_1 = h_1 \frac{\xi_1 (1 - \xi_1)}{(1 - 2\xi_1)^2}. \tag{4}$$

В уравнениях (3) и (4) предусмотрено два решения, когда начало координат совмещено с центром образца: в верхней части заготовки перед квадратным корнем следует брать знак «+», в нижней – знак «–». Частица с начальными безразмерными координатами $\rho_0 = 0{,}5$, $z_0 = 0{,}8$ после уменьшения высоты с $h_0 = 1{,}0$ до $h = 0{,}6$ при значении $k_1 = 0{,}8$ переходит в точку с координатами $\rho = 0{,}648$, $z = 0{,}458$ по первому варианту расчёта и в точку $\rho = 0{,}650$, $z = 0{,}455$ по второму варианту, разница менее 1 %.

Подставляя в (4) вместо h_1 его значение через коэффициент k_1 (или k_2), получим уравнения для координат при одновременном протекании этих процессов и любом текущем значении *h*:

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{h_0}{h}(1 - k_1) + k_1 \left\{ \frac{h_0 [4C_0 + h_0 (1 - k_1) + k_1 h]}{[h_0 (1 - k_1) + k_1 h](4C_0 + h_0)} \right\}^{3/4}}, \quad z = \frac{h}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{h_0 (1 - k_1) + k_1 h}{4C_0 + h_0 (1 - k_1) + k_1 h}} \right). \tag{5}$$

Компоненты скорости в переменных Лагранжа и Эйлера можно получить после дифференцирования этих уравнений по времени [6, 11].

Принимая во внимание уравнения при кручении относительно оси *z*:

$$z = z_0, \qquad \rho = \rho_0, \qquad \varphi = \varphi_0 + (\theta / L) z_0, \tag{6}$$

можно получить уравнения движения для осадки с кручением при любых условиях трения. В этом случае уравнения (5) не изменяются, добавляется уравнение для угловой координаты в сечениях *z*.

Для осадка кольца можно использовать уравнения движения [5]:

$$\rho^2 = a^2 + (\rho_0^2 - a^2)h/h_0, \qquad z = z_0 h/h_0, \tag{7}$$

с компонентами скорости:

$$u = \rho_t = v_0(\rho^2 - a^2)/(2\rho h), \qquad w = z_t = -v_0 z/h,$$

где a – радиус кольцевой поверхности, на которой отсутствуют радиальные перемещения ($u = 0$ *при* $\rho = a$). Предполагается, что он зависит от условий трения и соотношения размеров кольца, на каждом этапе деформации определяется из условия минимума требуемой мощности деформации [12].

При раздаче (обжиме) без изменения толщины кольца (затекание в щель) можно воспользоваться уравнениями движения [11]:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + f(t) = \rho_0^2 + r^2 - r_0^2, \qquad z = z_0. \tag{8}$$

Функция времени *f(t)* определяется значениями текущего и начального радиусов r и r_0 на внешнем (или внутреннем) контуре кольца на контакте с инструментом. Радиальная скорость $u_0 = dr/dt$ на этой поверхности предполагается известной. Для произвольной частицы компоненты скорости определяют уравнения:

$$2\rho\rho_t = 2r dr/dt \qquad u = d\rho/dt = (r/\rho)dr/dt = u_0(r/\rho), \qquad w = dz/dt = 0.$$

Условие постоянства объёма в интегральной и дифференциальной формах:

$$R = \frac{\rho}{\rho_0}\begin{vmatrix} \dfrac{\rho_0}{\rho} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} = -u_0\frac{r}{\rho^2} + u_0\frac{r}{\rho^2} + 0 = 0,$$

выполняются.

При суперпозиции осадки (1) и раздачи (10) в обоих вариантах выбора внешнего и внутреннего движений получаем одинаковые уравнения:

$$\rho^2 = \rho_0^2\frac{h_0}{h}, \qquad z = z_0 h/h_0. \tag{9}$$

Однородным сдвигом при осесимметричной деформации кольцевой заготовки в данной работе, по аналогии с однородным сдвигом при плоской деформации, названы два процесса. В первом движение частиц описывают уравнения (θ – угол сдвига в меридиональной плоскости от оси ρ):

$$\rho = \rho_0, \qquad z = z_0 + \theta\rho_0 \tag{10}$$

с областью определения переменных Лагранжа $0 \le \rho_0 \le R_0$, $0 \le z_0 \le h$. При осевой скорости на внешней боковой поверхности заготовки $v_0 = \theta_t R_0$ для произвольной частицы получаем:

$$u = \rho_t = 0, \qquad w = z_t = \theta_t\rho_0 = v_0\rho_0/R_0 = v_0\rho/R_0.$$

Условия постоянства объёма, как и в предыдущих случаях, выполняются.

Во втором варианте сдвиг определяют отклонения сечений $\rho = const$ от вертикали (оси z), движение частиц описывают уравнения:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + r^2 - r_0^2, \qquad z = z_0 \tag{11}$$

с областью определения переменных Лагранжа $r_0 \le \rho_0 \le R_0$, $z_m \le z_0 \le z_m + h$, где z_m – осевая координата нижней плоскости рассматриваемого кольцевого элемента.

Наклон линий $\rho = const$ в меридиональной плоскости определяет изменение радиальной компоненты скорости на внутренней поверхности, например, в виде линейной функции z :

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)(z - z_m)/h.$$

Скорость изменения угла сдвига при линейной зависимости *u(z)* составляет $\vartheta_t = (u_2 - u_1)/h$, для произвольной частицы внутри рассматриваемой области получаем:

$$u(\rho_0, z_0, t) = \rho_t = \frac{r}{\sqrt{\rho_0^2 + r^2 - r_0^2}}[u_1 + \vartheta_t(z_0 - z_m)], \qquad w = z_t = 0.$$

Если принять, как в первом варианте, частицу с координатами $\rho_0 = r_0,\ z_0 = z_m = 0$ неподвижной, тогда:

$$u(\rho_0, z_0, t) = \rho_t = u_k r/\rho = \vartheta_t z_0 r/\rho = \vartheta_t z_0 r/\sqrt{\rho_0^2 + r^2 - r_0^2}.$$

На внутреннем контуре $u_k(r_0, z_0, t) = r_t = u_2 z_0/h = \vartheta_t z_0$.

Наложение двух вариантов сдвига (10) и (11) при одновременном или последовательном протекании этих процессов описывают уравнения движения в форме Лагранжа:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + r^2 - r_0^2, \qquad z = z_0 + \theta\rho_0. \tag{12}$$

Для суперпозиции раздачи (8) и сдвига (10) при любом выборе внешних и внутренних движений для совмещенного движения получаем:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + f(T), \qquad z = z_0 + \theta\rho_0. \tag{13}$$

Для различных вариантов высадки можно рекомендовать уравнения движения [6]:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{z_0 h_0 + h(h_0 - z_0)}{h h_0}, \qquad \frac{z}{z_0} = \frac{h h_0}{h h_0 + z_0(h_0 - h)} \tag{14}$$

с полем скоростей

$$u = -v_n z\rho/h^2, \qquad w = v_n z^2/h^2,$$

где $z_0,\ h_0$ – начальные значения осевой координаты частицы и высоты заготовки, соответственно, $z,\ h$ – их текущие значения. Поле скоростей и траектории частиц предполагаются симметричными относительно оси процесса, радиальная компонента скорости $u(\rho, z, h) = 0$ при $\rho = 0$. Осевая компонента скорости $w(\rho, z, h)$ отсутствует на нижней торцевой плоскости зоны деформации ($w = 0$ при $z = 0$) и равна скорости пуансона $w = v_n$ на верхней контактной поверхности при $z = h$.

Для высадки в один или два перехода можно также использовать приведенные выше уравнения (2) [6], так как на большей части процесса приближённо высадку можно рассматривать как осадку цилиндра между параллельными плитами, когда сферическая форма пуансона отождествляется с зоной «мёртвого» металла и полным прилипанием заготовки на длину волокна поверхности пуансона.

Для гибки в области упругих и пластических деформаций можно использовать уравнения [10]:

$$x = \rho \cdot \sin\psi; \quad y = r - \rho\cdot\cos\psi; \quad \psi = \xi x_0/\rho. \tag{15}$$

Радиус $r(t)$ волокна, совпадающего с осью «x» в исходном состоянии (координата Лагранжа $y_0 = 0$), характеризует изменение эйлеровых координат во времени. Функция $\xi(x_0, y_0, r)$ зависит от кривизны r и лагранжевых координат ($x_0,\ y_0$), произведение $\xi\, x_0$ определяет новую $y_0 = const$, $\rho(r, y_0)$ – его текущий радиус. Условие $\partial\rho/\partial x_0 = 0$ вытекает из сделанного выше предположения, что волокна преобразуются в дуги окружностей, их радиус зависит только от ординаты y_0.

Если пренебречь изменением толщины волокон в процессе изгиба, тогда радиус их кривизны составит $\rho = r - y_0$ [7]. При указанных предположениях уравнения движения частиц полосы принимают вид:

$$x = (r - y_0)\sin\psi, \qquad y = r - (r - y_0)\cos\psi, \qquad \psi = x_0 / r. \tag{16}$$

Волокна $y_0 = const$ образуют дуги окружностей с единым центром, но разными радиусами кривизны:

$$x^2 + (y - r)^2 = (r - y_0)^2,$$

при сохранении равенства объёмов частиц в деформированном и исходном состояниях.

Для уравнений движения (16) гипотеза плоских сечений не выполняется, но более простая в математическом отношении она приводит к результатам, практически совпадающим с получаемыми на основе уравнений (15) как по смещениям, так и по изменению объёма, напряженному и деформированному состояниям.

Можно предложить иные варианты траекторий с выполнением условия постоянства объёма, в том числе, когда длина волокон остается неизменной. Тогда безразмерный параметр $\psi = x_0 / r$ зависит от координаты x_0 и радиуса волокна *r*, который в свою очередь зависит только от координаты y_0:

$$x = \rho\sin(x_0/\rho), \qquad y = r - \rho\cos(x_0/\rho), \qquad z = z_0 = const. \tag{17}$$

Из условия постоянства объёма *R = 1* с учетом граничного условия $\rho = r$ при $y_0 = 0$ получим $\rho = r - y_0$. Система (17) отличается от предыдущей (16) значениями аргументов тригонометрических функций:

$$x = (r - y_0)\sin\frac{x_0}{r - y_0} \qquad y = r - (r - y_0)\cos\frac{x_0}{r - y_0} \qquad z = z_0 = const.$$

В отличие от ранее рассмотренных вариантов, характеристики деформированного и напряженного состояний зависят преимущественно от координаты x_0, что характерно для сдвига с практически однородным деформированным состоянием по сечению полосы. При этом практически на всем протяжении процесса сохраняется вертикальное положение торцевой плоскости на кромке полосы.

Для гибки толстых листов, когда торцевую поверхность на всем протяжении процесса можно считать плоской и наклоненной под любым углом к её исходному состоянию, для описания уравнений движения частиц заготовки можно воспользоваться принципом суперпозиции [3] с использованием двух рассмотренных выше вариантов движения. Если считать внешним движение в соответствии с уравнениями (16), а внутренним – (17), тогда совмещенное движение описывают уравнения:

$$x = (r - y_0)\cos\left(\frac{x_0}{r - y_0}\right)\sin\left(\frac{r - y_0}{r}\sin\frac{x_0}{r - y_0}\right), \quad y = r - (r - y_0)\cos\left(\frac{x_0}{r - y_0}\right)\cos\left(\frac{r - y_0}{r}\sin\frac{x_0}{r - y_0}\right).$$

Если же считать внешним движение (17), а внутренним – (16), тогда соответственно получим:

$$x = (r - y_0)\cos(x_0/r)\sin(\sin x_0/r), \qquad y = r - (r - y_0)\cos(x_0/r)\cos(\sin x_0/r).$$

Необычность аргументов тригонометрических функций связана с особенностями накладываемых движений. Эти уравнения иллюстрируют сложность построения кинематически возможных полей скоростей для подобных процессов без описания уравнений движения.

До сих пор были рассмотрены уравнения движения в очаге деформации. Однако, во многих случаях, например, при изгибе полосы сосредоточенной силой, приложенной к её торцевому сечению, возникают внешние деформируемые или жесткие зоны, движение которых также должно учитываться. В таких случаях заготовку, в частности, полосу, следует представить состоящей из двух зон: деформированной на участке контакта полосы с инструментом и недеформированной. В жесткой зоне уравнения движения должны соответствовать движению абсолютно твердых тел:

$$x=(r-y_0)\cdot\sin\varphi+(x_0-r\varphi)\cdot\cos\varphi,\quad y=r-(r-y_0)\cdot\cos\varphi+(x_0-r\varphi)\cdot\sin\varphi.$$

Волокна остаются прямыми, их наклон изменяется по мере увеличения угла изгиба $\varphi(t)$, который является функцией времени. Компоненты скорости в этой зоне:

$$x_t=-\varphi_t[(x_0-r\varphi)\cdot\sin\varphi+y_0\cdot\cos\varphi],\quad y_t=\varphi_t[(x_0-r\varphi)\cdot\cos\varphi-y_0\cdot\sin\varphi]$$

соответствуют вращению абсолютно твердого тела с угловой скоростью φ_t, мгновенный центр скоростей находится на пересечении волокна, проходящего через начало координат, с плоскостью, ограничивающей деформированную часть полосы. Компоненты скорости в этой зоне в форме Эйлера:

$$x_t=-\varphi_t[y-r(1-\cos\varphi)],\qquad y_t=\varphi_t(x-r\sin\varphi)$$

подтверждают, что изменение объёма и сдвиги отсутствуют.

В качестве примера установившегося процесса можно рассмотреть поперечно-винтовую прокатку [13]. Описание движения в форме Лагранжа не требует строгой формулировки граничных условий на свободных поверхностях заготовки и позволяет перейти к более простым уравнениям. Принимая в качестве переменных Лагранжа начальные координаты частиц x_0, y_0, z_0, этот процесс можно рассматривать как наложение поступательного движения с постоянной скоростью v_0 в направлении оси прокатки:

$$x=x_0,\qquad y=y_0,\qquad z=z_0+v_0t, \tag{18}$$

вращения с постоянной угловой скоростью ω_0

$$x=x_0\cos\Delta\varphi-y_0\sin\Delta\varphi,\qquad y=x_0\sin\Delta\varphi+y_0\cos\Delta\varphi,\qquad \Delta\varphi=\omega_0t,\qquad z=z_0 \tag{19}$$

и непосредственно деформации в пространстве между валками и в примыкающих к нему объемах («внешние зоны деформации»). Предполагая деформацию однородной по сечению гильзы и принимая логарифмическую меру Генки:

$$\varepsilon=\ln(l/l_0), \tag{20}$$

деформацию можно описать простейшими уравнениями как при линейном растяжении в направлении оси «z»:

$$z=z_0\exp(\varepsilon_z),\qquad x=x_0\exp(-0{,}5\varepsilon_z)\qquad y=y_0\exp(-0{,}5\varepsilon_z). \tag{21}$$

Здесь деформация ε_z является функцией времени, т.е. в процессе деформации возникают скорости перемещения и скорости деформации, а после завершения процесса скорости деформации частиц обращаются в 0, полученные в результате этого относительные перемещения характеризуют деформированное состояние рассматриваемого объема. Если длину очага деформации (расстояние между плоскостями начала и окончания деформации растяжения) обозначить через L, тогда временную зависимость деформации можно записать в виде

$$\varepsilon_z=\varepsilon_0v_ct/L, \tag{22}$$

где ε_0 – деформация частиц при выходе из очага деформации, v_c – усредненная по длине очага деформации скорость заготовки.

В результате суперпозиции уравнения совмещенного движения в форме Лагранжа принимают вид [13]:

$$x = \exp(-\varepsilon_0 v_c t / 2L)(x_0 \cos\Delta\varphi - y_0 \sin\Delta\varphi),$$

$$y = \exp(-\varepsilon_0 v_c t / 2L)(x_0 \sin\Delta\varphi + y_0 \cos\Delta\varphi), \qquad z = z_0 \exp(\varepsilon_0 v_c t / L) + v_0 t. \tag{23}$$

Дифференцирование этих уравнений по времени позволяет определить компоненты скорости, например в переменных Эйлера:

$$v_x = -v_c \varepsilon_0 x / 2L - \omega\, y, \qquad v_x = -v_c \varepsilon_0 y / 2L + \omega\, x, \qquad v_z = v_0 + v_c z \varepsilon_0 / L,$$

а затем и скорости деформации в декартовой или цилиндрической системе координат. Значение якобиана системы (23) подтверждает, что деформация происходит без изменения объема частиц. При отсутствии деформации ($\varepsilon_0 = 0$) скорость частиц в направлении оси z остается неизменной.

ВЫВОДЫ

Рассмотрен общий алгоритм исследования процессов деформации с использованием принципа суперпозиции и уравнений движения в форме Лагранжа. Алгоритм предусматривает использование известных решений, в том числе приведенных в данной работе, для описания траекторий частиц в очаге деформации и жестких зонах заготовки исследуемого процесса. Аналитическое или численное дифференцирование получаемых суперпозицией уравнений движения по переменным Лагранжа и времени является основой для расчета деформированного состояния (деформаций и скоростей деформаций) с последующим переходам к энергетическим характеристикам с учетом истории деформирования и свойств материала (упрочнения). Предлагаемые системы уравнений движения удовлетворяют начальным условиям и условиям постоянства объёма. Алгоритм и приведенные уравнения могут быть использованы для анализа установившихся и неустановившихся процессов деформации с применением новых энергетических критериев для накопленных деформаций, локальных и интегральных энергетических характеристик.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алюшин Ю. А. Механика твёрдого тела в переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин – М. : Машиностроение, 2012. – 192 с.

2. Алюшин Ю. А. Особенности механики твердого тела в переменных Лагранжа. Сообщение 1 / Ю. А. Алюшин // Обработка металлов давлением : сборник научных трудов – Краматорск : ДГМА, 2014. – № 2 (39). – С. 3–11.

3. Алюшин Ю. А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 3. – С. 13–19.

4. Джонсон В. Механика процессов выдавливания металлов / В. Джонсон, Х. Кудо – М. : Металлургия, 1965. – 174 с.

5. Алюшин Ю. А. Метод верхней оценки и его применение при решении задач обработки металлов давлением / Ю. А. Алюшин – Ростов-на-Дону, РИСХМ, 1977.

6. Алюшин Ю. А. Кинематические характеристики и уравнения движения при высадке осесимметричных деталей с фланцем / Ю. А. Алюшин, А. А. Сидоров // Обработка металлов давлением : сборник научных трудов. – Краматорск : ДГМА, 2012. – № 1 (30). – С. 8–15.

7. Пластический изгиб толстых полос для сварных труб / Ю. А. Алюшин, С. В. Самусев, Г. П. Жигулев // Обработка материалов давлением : сборник научных трудов. – Краматорск : ДГМА, 2014. – № 1 (38). – С. 3–11.

8. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. / Л. М. Качанов – М. : Наука, 1969. – 420 с.

9. Алюшин Ю. А. Механические и физические характеристики материалов в энергетической модели деформаций / Ю. А. Алюшин., С. А. Кузнецов // Обработка материалов давлением : сборник научных тудов. – Краматорск ДГМА, 2011. – № 1 (26). – С. 3–10.

10. Энергетическая модель обратимых и необратимых деформаций / Ю. А. Алюшин, С. А. Еленев, С. А. Кузнецов, Н. Ю. Кулик – М. : Машиностроение, 1995. – 128 с.

11. Алюшин Ю. А. Кинематически возможные поля скоростей для осесимметричной деформации в переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин // Обработка материалов давлением : сборник научных трудов. – Краматорск : ДГМА, 2013. – № 1 (34). – С. 3–10.

12. Алюшин Ю. А. Исследование процессов обработки металлов давлением с помощью кинематически возможных полей скоростей. / Ю. А. Алюшин – Ростов-на-Дону, РИСХМ, 1978. – 98 с.

13. Кинематически возможные поля скоростей при поперечно-винтовой прокатке / Ю. А. Алюшин, А. В. Гончарук, Г. П. Жигулев, Р. Н. Фартушный // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні : тематич. зб. наук. пр. – Краматорськ : ДДМА, 2008. – С. 3 – 8.

REFERENCES

1. Aljushin Ju. A. Mehanika tvjordogo tela v peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin – M. : Mashinostroenie, 2012. – 192 s.

2. Aljushin Ju. A. Osobennosti mehaniki tverdogo tela v peremennyh Lagranzha. Soobshhenie 1 / Ju. A. Aljushin // Obrabotka metallov davleniem : sbornik nauchnyh trudov – Kramatorsk : DGMA, 2014. – № 2 (39). – S. 3–11.

3. Aljushin Ju. A. Princip superpozicii dvizhenij v prostranstve peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin // Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin. – 2001. – № 3. – S. 13–19.

4. Dzhonson V. Mehanika processov vydavlivanija metallov / V. Dzhonson, H. Kudo – M. : Metallurgija, 1965. – 174 c.

5. Aljushin Ju. A. Metod verhnej ocenki i ego primenenie pri reshenii zadach obrabotki metallov davleniem / Ju. A. Aljushin – Rostov-na-Donu, RISHM, 1977.

6. Aljushin Ju. A. Kinematicheskie harakteristiki i uravnenija dvizhenija pri vysadke osesimmetrichnyh detalej s flancem / Ju. A. Aljushin, A. A. Sidorov // Obrabotka metallov davleniem : sbornik nauchnyh trudov – Kramatorsk : DGMA, 2012. – № 1 (30). – S. 8–15.

7. Plasticheskij izgib tolstyh polos dlja svarnyh trub / Ju. A. Aljushin, S. V. Samusev, G. P. Zhigulev // Obrabotka materialov davleniem : sbornik nauchnyh trudov. – Kramatorsk : DGMA, 2014. – № 1 (38). – S. 3–11.

8. Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti. / L. M. Kachanov – M. : Nauka, 1969. – 420 s.

9. Aljushin Ju. A. Mehanicheskie i fizicheskie harakteristiki materialov v jenergeticheskoj modeli deformacij / Ju. A. Aljushin., S. A. Kuznecov // Obrabotka materialov davleniem : sbornik nauchnyh tudov. – Kramatorsk DGMA, 2011. – № 1 (26). – S. 3–10.

10. Jenergeticheskaja model' obratimyh i neobratimyh deformacij / Ju. A. Aljushin, S. A. Elenev, S. A. Kuznecov, N. Ju. Kulik – M. : Mashinostroenie, 1995. – 128 s.

11. Aljushin Ju. A. Kinematicheski vozmozhnye polja skorostej dlja osesimmetrichnoj deformacii v peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin // Obrabotka materialov davleniem : sbornik nauchnyh trudov. – Krama-torsk : DGMA, 2013. – № 1 (34). – S. 3–10.

12. Aljushin Ju. A. Issledovanie processov obrabotki metallov davleniem s pomoshh'ju kinematicheski vozmozhnyh polej skorostej. / Ju. A. Aljushin – Rostov-na-Donu, RISHM, 1978. – 98 s.

13. Kinematicheski vozmozhnye polja skorostej pri poperechno-vintovoj prokatke / Ju. A. Aljushin, A. V. Goncharuk, G. P. Zhigulev, R. N. Fartushnyj // Udoskonalennja procesiv i obladnannja obrobki tiskom v metalurgiï i mashinobuduvanni : tematich. zb. nauk. pr. – Kramators'k : DDMA, 2008. – S 3 – 8.

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. НИТУ МИСиС

НИТУ МИСиС – Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, РФ.

E-mail: alyushin7@gmail.com

Статья поступила в редакцию 06.10.2014 г.